数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 143-147

Keller-Segel 方程式系に対する自己相似解

広島大学大学院理学研究科 村本 直己 (Naomi Muramoto)
神戸大学工学部 内藤 雄基 (Yūki Naito)
広島大学総合科学部 吉田 清 (Kiyoshi Yoshida)

1 Introduction

ここでは $\mathbf{R}^2$ において，正のパラメータ λ をもつ半線形楕円型方程式

$$\Delta\psi + \frac{\varepsilon}{2}x\cdot\nabla\psi + \lambda e^{-\frac{1}{4}|x|^2}e^{\psi} = 0 \tag{1.1}$$

の遠方で減衰する条件, すなわち

$$\lim_{|x|\to\infty}\psi(x) = 0 \tag{1.2}$$

を満たす解 $\psi\in C^2$ と λ の関係について考える．ただし ε は正の定数である．

この方程式 (1.1) は走化性による細胞性粘菌の集合体形成の数学モデルである Keller-Segel 方程式系 [9]

$$\text{(KS)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla u - u\nabla v) & \text{in } \mathbf{R}^2,\ t>0 \\ \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \alpha u & \text{in } \mathbf{R}^2,\ t>0 \end{cases}$$

の自己相似解を考察することによって得られる．ここで (KS) の解 (u,v) が

$$u(x,t) = k^2u(kx,k^2t),\qquad v(x,t) = v(kx,k^2t),\quad {}^\forall k>0$$

をみたすとき, この (u,v) を (KS) の自己相似解であるという．上の式において $k=1/\sqrt{t}$ と置くと

$$u(x,t) = \frac{1}{t}u(x/\sqrt{t},1),\qquad v(x,t) = v(x/\sqrt{t},1)$$

となる．更に $\varphi(\cdot)=u(\cdot,1)$, $\psi(\cdot)=v(\cdot,1)$ と置き，$u=\varphi/t$ および $v=\psi$ を (KS) に代入すると (φ,ψ) は

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) + \dfrac{1}{2}x\cdot\nabla\varphi + \varphi = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ \Delta\psi + \dfrac{\varepsilon}{2}x\cdot\nabla\psi + \alpha\varphi = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

をみたすことが分かる．ただし $x/\sqrt{t}$ を再び x とする．この (1.3) の球対称な解の存在と非存在については永井-水谷 [10] や水谷-村本-吉田 [11] などで述べられている．

ここでは c を正定数とし

$$\varphi(x) = ce^{-\frac{1}{4}|x|^2}e^{\psi(x)} \tag{1.4}$$

とおく．このとき φ は (1.3) の第 1 式をみたし, 第 2 式から $\lambda=\alpha c$ として (1.1) を得る．この (1.4) 式は φ,ψ に対して例えば

$$\lim_{|x|\to\infty}e^{\frac{|x|^2}{4}}\varphi(x) = c,\quad \lim_{|x|\to\infty}\psi(x) = 0$$

というような減衰性を与えたときに得られる恒等式である．

(1.1)-(1.2) の解の存在性について次のような定理を得た．

定理 1.1 $0<\varepsilon<2$ とする．このとき，次の (i),(ii) をみたす $\lambda_*>0$ が存在する．

(i) $\lambda>\lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) の解は存在しない

(ii) $0<\lambda<\lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) の解は少なくとも 2 つ存在する

特に $0<\varepsilon<1$ のとき，(i),(ii) に加えて次も成り立つ．
(iii) $\lambda=\lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) は唯 1 つ解をもつ．

また次の定理はパラメータ λ とそのときの (1.1)-(1.2) の解 ψ との対 (λ,ψ) の構造に関する結果である．

定理 1.2 定理 1.1 における λ_* に対し，(1.1)-(1.2) の解 ψ_* が存在すると仮定する (定理 1.1 から $0<\varepsilon<1$ のとき，この仮定は常に成り立つ)．このとき，パラメータと (1.1) − (1.2) の解の組 (λ,ψ) は $(-\delta,\delta)$ ($\delta>0$ は十分小さい) を定義域とする 2 回連続的微分可能な写像 $s\longmapsto(\lambda(s),\psi(s))$ で表され次を満たす．

(i) $(\lambda(0),\psi(0))=(\lambda_*,\psi_*)$.

(ii) $\dot\lambda(0)=0,\ \ddot\lambda(0)<0$, すなわち，$\lambda(s)<\lambda(0)=\lambda_*\ (0<|s|<\delta)$.

(iii) $s<0$ ならば $\psi(s)=\underline{\psi}_{\lambda(s)}$, $\psi(s)\neq\psi_*$ を満たす．

(iv) (λ_*,ψ_*) の近傍で，(1.1)-(1.2) の解の組 (λ,ψ) は分枝 $\{(\lambda(s),\psi(s))\,|\,|s|<\delta\}$ のみである．

定理 1.2 の証明は鈴木 [15](または [5]) で同様な証明が述べられている．

2 重み付きの Sobolev 空間

この節では定理を示すために用いた重み付きの Sobolev 空間について少し詳しく述べる．
$\alpha\geqq 0$ に対して

$$L^2_\alpha(\mathbf{R}^2)=\left\{u\in L^2(\mathbf{R}^2)\,\middle|\,\int_{\mathbf{R}^2}e^{2\alpha|x|^2}|u|^2\,dx<\infty\right\},$$
$$H^1_\alpha(\mathbf{R}^2)=\left\{u\in H^1(\mathbf{R}^2)\,\middle|\,\int_{\mathbf{R}^2}e^{2\alpha|x|^2}(u^2+|\nabla u|^2)\,dx<\infty\right\},$$
$$H^2_\alpha(\mathbf{R}^2)=\left\{u\in H^1_\alpha(\mathbf{R}^2)\,\middle|\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^1_\alpha(\mathbf{R}^2),\ i=1,\cdots,N\right\}$$

はそれぞれ次を内積にもつ Hilbert 空間である．

$$(u,v)_{L^2_\alpha}=\int_{\mathbf{R}^2}e^{2\alpha|x|^2}uv\,dx,$$
$$(u,v)_{H^1_\alpha}=(u,v)_{L^2_\alpha}+(\nabla u,\nabla v)_{L^2_\alpha},$$
$$(u,v)_{H^2_\alpha}=(u,v)_{L^2_\alpha}+(\nabla u,\nabla v)_{L^2_\alpha}+\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{L^2_\alpha}.$$

関連するノルムを次のように表すことにする．

$$\|u\|_{L^2_\alpha}=\sqrt{(u,u)_{L^2_\alpha}},\qquad \|u\|_{H^1_\alpha}=\sqrt{(u,u)_{H^1_\alpha}},\qquad \|u\|_{H^2_\alpha}=\sqrt{(u,u)_{H^2_\alpha}}.$$

これらの関数空間や次に挙げる性質などは M. Escobedo and O. Kabian[6], S. Kawashima[8] らによって扱われている．

補題 2.1 ([6, 8]) (i) すべての $u \in H^1_\alpha(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$8\alpha \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} u^2\, dx \leqq \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |\nabla u|^2\, dx. \qquad \textbf{(Poincaré type inequality)}$$

(ii) すべての $u \in H^1_\alpha(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$4\alpha^2 \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |x|^2 u^2\, dx \leqq \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |\nabla u|^2\, dx.$$

また, 埋め込みの compact 性については次が成り立つ.

補題 2.2 ([6, 8]) $\alpha > 0$ とする. このとき次の埋め込みは compact である.

$$H^1_\alpha(\mathbf{R}^2) \subset L^2_\alpha(\mathbf{R}^2).$$

3 定理 1.1 の証明の概略

まず (1.1)-(1.2) の解であるということについて次のことを述べておく.

命題 3.1 $0 < \varepsilon < 2$ とする. このとき, (i)-(iii) は互いに同値である.

(i) $\psi \in H^1_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2)$ は (1.1) の弱解である.

(ii) $\psi \in H^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2)$ (1.1) の弱解である.

(iii) $\psi \in C^2(\mathbf{R}^2)$ は (1.2) をみたす (1.1) の解である.

そこで以下において, 上の (i)-(iii)(のいずれか) をみたすとき単に (1.1) の解であると呼ぶことにする. また ψ が (1.1) の解であるならば指数関数的な減衰をする. すなわち, 次の不等式が成り立つ.

$$0 < \psi(x) < ce^{-\frac{\kappa_\varepsilon}{4}|x|^2} \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \tag{3.1}$$

ただし $\kappa_\varepsilon = \min\{1, \varepsilon\}$.

定義 3.2 各 λ に対して, (1.1) の解集合を

$$\mathcal{S}_\lambda = \left\{\psi \in H^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2) \mid \psi \text{ は (1.1) の解である}\right\}.$$

とする. また, どんな $\psi \in \mathcal{S}_\lambda$ に対しても $\underline{\psi}_\lambda \leqq \psi$ をみたす $\underline{\psi}_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ を最小解と呼ぶことにする.

まず (1.1) の解の存在と非存在について, 次の結論を得る.

定理 3.3 $0 < \varepsilon < 2$ とする. このとき, 次をみたす $\lambda_* > 0$ が存在する.

(i) $\lambda > \lambda_*$ ならば $\mathcal{S}_\lambda = \emptyset$.

(ii) $0 < \lambda < \lambda_*$ ならば $\mathcal{S}_\lambda \neq \emptyset$. さらにどの λ $(0 < \lambda < \lambda_*)$ に対しても最小解 $\underline{\psi}_\lambda$ が存在する.

この定理の証明 (特に (ii)) は $F : \mathbf{R} \times H^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2) \to L^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2)$ を

$$F(\lambda, \psi) = -\Delta\psi - \frac{\varepsilon}{2} x \cdot \nabla\psi - \lambda e^{-\frac{|x|^2}{4}} e^{\psi}.$$

とおくときの $(0, 0)$ における陰関数定理と Supersolution と Subsolution の方法などを用いて示すことができる.

次に定理 1.1 の (ii) を示すために次の $\mu_1(\lambda, \psi)$ を定義する.

定義 3.4 各 $\lambda \in \mathbf{R}$, $\psi \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して $\mu_1(\lambda, \psi)$ を次のように定義する.

$$\mu_1(\lambda,\psi) = \inf_{\substack{v \in H^1_{\varepsilon/8} \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \left(e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} |\nabla v|^2 - \lambda e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^{\psi} v^2 \right) dx}{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} v^2 \, dx}. \tag{3.2}$$

この $\mu_1(\lambda, \psi)$ は各 (λ, ψ) に対する固有値問題

$$-\mathrm{div}(e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2}\nabla v) - \lambda e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^{\psi} v = \mu e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} v, \quad v \in H^1_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2) \tag{3.3}$$

の第 1 固有値である. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3.5 $\underline{\psi}_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ を最小解とし $\mu_1(\lambda, \underline{\psi}_\lambda) > 0$ とする. このとき, (1.1) は $\underline{\psi}_\lambda < \overline{\psi}_\lambda$ をみたす解 $\overline{\psi}_\lambda$ をもつ.

この定理は

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} |\nabla v|^2 \, dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^{\underline{\psi}_\lambda} (e^v - 1 - v) \, dx \quad \text{for } v \in H^1_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2).$$

に対して峠の補題を用いることで示される. J の critical point を $\psi_c(x)$ とすると $\overline{\psi}_\lambda = \underline{\psi}_\lambda + \psi_c$ が求める解である. さらに次の命題により定理 1.1 が示される.

命題 3.6 $0 < \lambda < \lambda_*$ とし $\underline{\psi}_\lambda$ を最小解とする. ただし λ_* は定理 3.3 と同様のものとする. このときすべての λ $(0 < \lambda < \lambda_*)$ に対して $\mu_1(\lambda, \underline{\psi}_\lambda) > 0$ が成り立つ.

4 定理 1.2 の証明の概略

次の問題を考える.

$$\Phi(s,\sigma,u) := -\Delta(\psi_* + s\phi_1 + u) - \frac{\varepsilon}{2} x \cdot \nabla(\psi_* + s\phi_1 + u) - (\lambda_* + \sigma) e^{-\frac{1}{4}|x|^2} e^{\psi_* + s\phi_1 + u} = 0$$

ただし ϕ_1 は $\mu_1(\lambda_*, \psi_*)$ $(=0)$ に対する固有関数で $\phi_1 > 0$ かつ $\phi_1 \in H^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2)$ である. 上記の問題は陰関数定理を用いる.

$$\Phi(0,0,0) = 0$$

および (σ, u) に関する $(0,0,0)$ での Φ の微分

$$\Phi_{(\sigma,u)}(0,0,0) : \mathbf{R} \times Y \to L^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2)$$

は Riesz-Shauder 理論を適用して可逆である事が分かる. ただし

$$Y = \left\{ u \in H^2_{\varepsilon/8}(\mathbf{R}^2) \;\middle|\; \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} u\phi_1 \, dx = 0 \right\}.$$

従って陰関数定理より, 小さな $\delta > 0$ が存在して

$$(\sigma(\cdot), u(\cdot)) \in C^2((-\delta,\delta), \mathbf{R} \times Y)$$

かつ

$$\Phi(s, \sigma(s), u(s)) = 0, \quad \sigma(0) = 0 \text{ and } u(0) = 0$$

である.

$$\psi(s) = \psi_* + s\phi_1 + u(s) \text{ かつ } \lambda(s) = \lambda_* + \sigma(s).$$

とおく. このとき $(\lambda(s), \psi(s))$ は (i)-(iv) を満たすことが言える.

参考文献

[1] P. Biler, Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis, Adv. Math. Sci. Appl. **8**(1998), 715–743.

[2] S. Childress, Chemotactic collapse in two dimensions, Lecture Notes in Biomath., **55**, Springer, 1984, 217–237.

[3] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, Math. Biosci. **56**(1981), 217–237.

[4] R. Courant and D. Hilbert, Method of Mathematical Physics, Vol. 1, Interscience, 1953.

[5] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), 207–218.

[6] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, Nonlinear Anal. **11**(1987), 1103–1133.

[7] D. Gillbarg and N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Eqautions of Second Order, 2nd ed., Springer, 1983.

[8] S. Kawashima, Self-similar solutions of a convection-diffusion equation, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **12** (1993), 123–136.

[9] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.

[10] Y. Mizutani and T. Nagai, Self-similar radial solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis, Bull. Kyushu Inst. Tech. (Math. Natur. Sci), **42** (1995), 19-28.

[11] Y. Mizutani, N. Muramoto and K. Yoshida, Self-similar radial solutions to a parabolic system modelling chemotaxis via variational method, Hiroshima Math. J. **29** (1999), 145–160.

[12] T. Nagai, T. Senba and K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic sysytem of chemotaxis, Funkcialaj Ekvacioj **40** (1997), 411–433.

[13] T. Ogawa, A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Anal. **14** (1990), 765-769.

[14] D. H. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 979–1000.

[15] T. Suzuki. Semilinear Elliptic Equations, Gakkōtosho, 1994.